Das Brachystochronen-Problem

Ist der kürzeste Weg auch gleichzeitig der schnellste? Ohne Frage ist unter all den Kurven die Gerade die geometrisch kürzeste Verbindung. Aber ist sie auch die zeitlich kürzeste Verbindung? Diese Frage kann man entweder rein mathematisch beantworten oder mit Hilfe der Evolutionsstrategie, die wie die Natur mit „Versuch und Irrtum" optimiert.

Der Wettbewerb 1696 – Mit dieser Frage beschäftigte sich der Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli schon 1696, als er seinen Mathematikerkollegen das sogenannte **Brachystochronen-Problem** stellte. Dieses handelt von einem punktförmigen Körper (auch Massepunkt genannt), der sich, ausgehend von einem höher gelegenen Punkt A, reibungsfrei und lediglich unter dem Einfluss der Schwerkraft zu einem etwas entfernt und tiefer liegenden Punkt B bewegen soll. Bernoulli forderte seine Mathematikerkollegen auf, ihm jene Bahnkurve zu nennen, entlang derer sich der punktförmige Körper in *kürzester Zeit* von A nach B bewegt. Diese optimale Bahnkurve wird auch als „Bahn kürzester Zeit" beziehungsweise als **„Brachystochrone"** (griechisch: brachýs »kurz«, chrónos »Zeit«) bezeichnet.

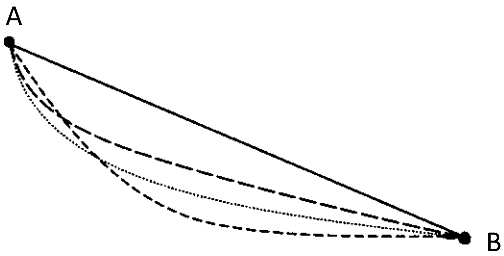

Abbildung 1: Wenn es darum geht, zwei Punkte, die nicht auf gleicher Höhe und nicht direkt untereinander liegen, mit einer Bahnkurve zu verbinden, so gibt es unzählig verschiedene Möglichkeiten.

Bernoulli selbst und einige seiner Kollegen hatten schon damals herausgefunden, dass die Brachystochrone die Form einer **Zykloiden** (zu deutsch: Rollkurve) hat. Eine solche Zykloide ergibt sich, wenn man einen Kreis auf einer Geraden abrollt und dabei einen festen Punkt auf dem Rand des Kreises beobachtet (vgl. Abb. 2).

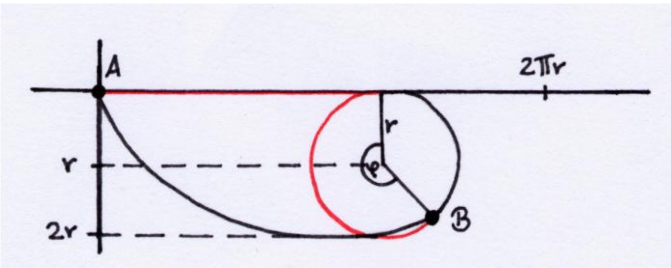

Abbildung 2: Ein Kreis mit Radius r rollt auf einer Geraden ab. Dabei beschreibt ein fester Punkt auf dem Rand des Kreises eine Zykloide mit der Periode $2\pi r$ ($\hat{=}$ Kreisumfang).

Für alle Punkte auf der Zykloiden gilt, dass eine Kugel, die in A startet, genau dann am schnellsten im Ziel ankommt, wenn sie entlang der Zykloiden rollt. Das wirklich Erstaunliche dabei ist, dass die Zykloide selbst dann die Bahn kürzester Zeit ist, wenn A und B soweit auseinanderliegen, dass die Kugel ein Stück bergauf rollen muss!

Das Brachystochronen-Problem

Hat man nun zwei Punkte A und B vorgegeben, zu denen man die zeitlich kürzeste Verbindung sucht, so weiß man zwar, dass diese die Form einer Zykloiden hat, aber um den zugehörigen Zykloidenausschnitt zeichnen zu können, muss man den Radius des zugehörigen Kreises kennen. Dieser lässt sich ganz einfach mit folgenden Schritten ermitteln:

1. Die beiden gegebenen Punkte A und B werden durch die Gerade AB miteinander verbunden (vgl. Abb. 3).
2. Man beschreibe unter der Horizontalen durch A eine beliebige Zykloide, die lediglich in A beginnen muss. Diese Zykloide schneidet die Gerade AB im Punkt R und die Horizontale im Punkt S (vgl. Abb. 3).

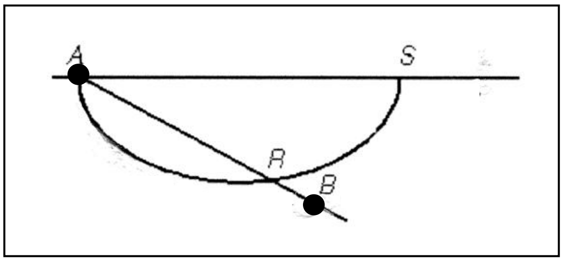

Abbildung 3

3. Das Dreieck ARS wird nun mittels einer zentrischen Streckung so gestreckt, dass der Punkt R auf den Punkt B abgebildet wird. Da bei zentrischen Streckungen die Bildgeraden stets parallel zur Urbildgeraden sind, lässt sich die Bildgerade zu RS leicht einzeichnen. Sie schneidet die Horizontale im Punkt L (vgl. Abb. 4).

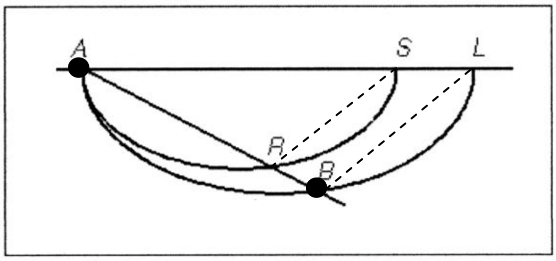

Abbildung 4

4. Mit dem 1. Strahlensatz und der Periodizität der Zykloide folgt nun:

   $\frac{AB}{AR} = \frac{AL}{AS} = \frac{2\pi \cdot r_{ABL}}{2\pi \cdot r_{ARS}} = \frac{r_{ABL}}{r_{ARS}}$ wobei r_{ARS} bzw. r_{ABL} der Radius jenes Kreises ist, welcher die gegebene bzw. die gesuchte Zykloide erzeugt.

5. Auflösen nach r_{ABL} ergibt: $r_{ABL} = \frac{AB}{AR} \cdot r_{ARS}$
6. Alle zur Berechnung von r_{ABL} benötigten Größen sind bekannt, so dass die Zykloide, die die Punkte A und B miteinander verbindet, ohne weiteres konstruiert werden kann.