1. Bau einer Kugelbahn

Experimentelle Bestimmung der Durchlaufzeiten (individuelle Lösung)

Versuchs-nummer	Gerade Durchlaufzeit in Sekunden	Zykloide Durchlaufzeit in Sekunden
1	1,34	0,85
2	1,49	1,04
3	1,59	1,03
4	1,35	1,01
5	1,41	1,00
6	1,61	1,07
7	1,29	1,02
8	1,41	1,06
9	1,34	1,01
10	1,57	1,04
Mittelwert	**1,44**	**1,013**

1.1. Berechne die Durchlaufzeiten der Kugel auf beiden Bahnen.

$$t_G = \sqrt{\frac{2}{9{,}81 m/s^2} \cdot \left(\frac{1{,}87^2 m^2}{0{,}46 m} + 0{,}46 m \right)} \approx 1{,}282 s$$

$$t_Z = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 m}{9{,}81 m/s^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}35 m - (0{,}7 m - 0{,}24 m)}{(0{,}7 m - 0{,}24 m)}} \right) \approx 0{,}83 s$$

1.2. Vergleiche die theoretischen mit den experimentell ermittelten Durchlaufzeiten und interpretiert das Ergebnis.

Die experimentelle Bestimmung der Durchlaufzeiten liefert höhere Werte. Mögliche Ursachen: Reibung, Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr.

Ungefähr gleich bleibt hingegen die Verhältniszahl: $\frac{t_{G\ theoretisch}}{t_{Z\ theoretsich}} \approx \frac{t_{G\ gemessen}}{t_{Z\ gemessen}}$

(Mit den Werten aus 1.1 bzw. 1.2 ergibt sich das Verhältnis $\frac{1{,}282}{0{,}83} = 1{,}54$ bzw. $\frac{1{,}44}{1{,}013} = 1{,}42$)

1.3. Überlege an welcher Position die Kugel auf der Geraden ihre höchste Geschwindigkeit erreicht und berechnet diese.

Die Geschwindigkeit hängt ausschließlich vom zurückgelegten Höhenunterschied ab. Die höchste Geschwindigkeit wird somit im Zielpunkt B erreicht.

$$v_B = \sqrt{2g(h_0 - h_B)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 m/s^2 \cdot (0{,}7m - 0{,}24m)} \approx 3 \ m/s$$

1.4. Diskutiere an welcher Position die Kugel entlang der Zykloiden ihre höchste Geschwindigkeit erreicht und berechnet diese.

Die höchste Geschwindigkeit wird im Tiefpunkt der Kurve erreicht, da hier der Höhenunterschied am größten ist.

$$v_T = \sqrt{2g(h_0 - h_T)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 m/s^2 \cdot (0{,}7m)} \approx 3{,}7 \ m/s$$

1.5. Erkläre mit dem Energieerhaltungssatz, dass die Endgeschwindigkeit der Kugel auf beiden Bahnen gleich ist und berechne sie. Überlege, warum dann nicht auch die Durchlaufzeiten gleich sind.

Wenn die Kugel in Punkt A startet besitzt sie Lageenergie (= potentielle Energie). Beim Herunterrollen wird diese mehr und mehr in Bewegungsenergie (= kinetische Energie) umgewandelt. Im Endpunkt B besitzt die Kugel sowohl Lage- als auch Bewegungsenergie. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes, der davon ausgeht, dass während des Herunterrollens keine Energie in nicht nutzbare Formen (wie z.B. Wärme) umgewandelt wird, gilt:

$$\underbrace{mgh_0}_{\text{Lageenergie in Punkt A}} = \overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{\text{Bewegungsenergie in Punkt B}} + \underbrace{mgh_B}_{\text{Lageenergie in Punkt B}}$$

Da beide Kugeln zu Beginn und am Ende die gleiche Lageenergie haben, muss auch ihre Bewegungsenergie im Endpunkt übereinstimmen. Obige Gleichung nach v aufgelöst ergibt die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit:

$$v_{End\ Gerade} = v_{End\ Zykloide} = \sqrt{2g(h_0 - h_B)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 m/s^2 \cdot (0{,}7m - 0{,}24m)} \approx 3 \ m/s$$

Die Zykloidenbahn ist zwar um einiges länger als die gerade Bahn, aber dafür fällt sie zu Beginn wesentlich steiler ab, so dass deutlich mehr Lageenergie in Bewegungsenergie umgesetzt werden kann. Mit anderen Worten: Die Kugel wird auf der Zykloidenbahn schneller beschleunigt und hat aufgrund dessen die höhere Durchschnittsgeschwindigkeit.

1.6. Überlege, wo eine Brachystochrone in der Technik eingesetzt werden könnte.

Brachystochronen sind überall dort sinnvoll, wo eine Strecke schnellstmöglich zurückgelegt werden soll, zum Beispiel bei Notrutschen, Halfpipe …

2. Simulation einer Kugelbahn im Computer mit dem Programm EvoBrach

Bestimmung der Durchlaufzeiten (individuelle Lösung)

Versuchs-nummer	Anzahl der Stützstellen	Anzahl der Generationen	Durchlaufzeit in Sekunden Brachystochrone
1	15	312	0,86259096
2	15	292	0,86259096
3	15	337	0,86259098
4	3	59	0,88651092
5	3	60	0,88651092
6	3	53	0,88651092
7	10	175	0,86565364
8	10	151	0,86565365
9	10	154	0,86565365
			Gerade: 1,31640631
			Parabel: 1,0657159

Info

Versuch

Auswertung

Lösung

2.1 Überlege, warum bei gleicher Anzahl von Stützstellen bei jeder Optimierung eine andere Anzahl von Generationen benötigt wird bis die optimierte Form – die Brachystochrone – entstanden ist.

Die Optimierung der Kugelbahn wird mit Hilfe der Evolutionsstrategie durchgeführt. Die Nachkommen werden durch zufällige Höhenänderungen der einzelnen Stützstellen generiert. Der Nachkomme mit der minimalen Durchlaufzeit ist Elter der nächsten Generation. Die Optimierung wird nach einer festgelegten Regel abgebrochen.

Zusatzinformation: Das Programm verwendet eine (1,10)-gliedrige Evolutionsstrategie mit Kovarianzmatrix-Adaptation. Die Optimierung wird abgebrochen, wenn sich die achte Stelle hinter dem Komma zehnmal hintereinander nicht geändert hat.

2.2 Erkläre, warum die Kurve im Lauf der Optimierung mit der Evolutionsstrategie zum Teil sehr unregelmäßig aussieht.

Auf der Basis von Zufallsprozessen werden die Lösungsvorschläge so lange verändert bis die optimale Lösung gefunden ist. Dabei kann auch ein weniger guter Nachkomme entstehen.